Законы алгебры логики (булевой)

«Законами алгебры логики» называют преобразования одной формы записи логического примитива в другую, тождественную по результату, но содержащую меньшее (обычно – минимальное) число логических операций в некотором *«базисе»* – наборе, позволяющем представить любую логическую функцию. Базис может быть минимальным или избыточным, когда при удалении какого–либо элемента сохраняется его полнота. Базис может состоять из одного, двух или трёх логических операций. Избыточный базис используют, *когда он обеспечивает бóльшую, по сравнению с минимальным, наглядность*. Базис «**И**»-«**ИЛИ**»-«**НЕ**», называемый **«каноническим»**, – избыточный. Он содержит *унарную* операцию «**НЕ**» и две *бинарные* – «**И**»-«**ИЛИ**» при удалении любой из которых сохраняется полнота. Популярным также является «*алгебраический нормальный базис*», где «**НЕ**» заменили на «**1**», «**И**» – сохранили, а «**ИЛИ**» заменили на «**ЛИБО**». В логических формулах применяют односимвольные обозначения действий, приведенные ниже таблично в совокупности с другими популярными логическими операциями:

«**И**»	«**ИЛИ**»	«**НЕ**» **X**	«**ЛИБО**»	«**ЕСЛИ-ТО**»	«**ЭКВИВАЛЕНЦИЯ**»
$\&, \cdot, \wedge$	$+, \vee$	$\overline{x}, \neg x$	$\oplus$	$\rightarrow$	$\equiv$

Представим эти бинарные операции таблицами истинности:

X	**Y**	**X·Y**	**X+Y**	**X⊕Y**	**X→Y**	**X≡Y**
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Запишем выражения законов алгебры логики в каноническом базисе:

1) Примитивы: X+1=1, X+0=X, X·1=X, X·0=0, X·X=X, X+X=X, $X+\overline{X}=1, X\cdot\overline{X}=0, \overline{\overline{X}}=X$

2) X·(X+Y)=X, X+X·Y=X, $(X+Y)\cdot(X+\overline{Y})=X$, $X\cdot Y+X\cdot\overline{Y}=X$ – законы поглощения

3) (X+Y)·(X+Z)=X+Y·Z, X·Y+ X·Z=X·(Y+Z) –общий случай для законов поглощения

4) $X+\overline{X}\cdot Y=X+Y$, $X\cdot(\overline{X}+Y)=X\cdot Y$ – законы Блейка-Порецкого

5) $\overline{X\cdot Y}=\overline{X}+\overline{Y}$, $\overline{X+Y}=\overline{X}\cdot\overline{Y}$ – законы Моргана

6) $X\cdot Y+\overline{X}\cdot Z+Y\cdot Z=X\cdot Y+\overline{X}\cdot Z$, $(X+Z)\cdot(\overline{X}+Y)\cdot(Y+Z)=(X+Z)\cdot(\overline{X}+Y)$ – это тоже варианты закона Блейка-Порецкого (**выделенные дизъюнкции – «лишние»**).

Запишем выражения законов алгебры логики, применяемых для преобразования булевых функций, представленных алгебраическим базисом, через канонический:

1) $X\oplus 1=\overline{X}$	2) $X\oplus Y=X\cdot\overline{Y}+\overline{X}\cdot Y=(X+Y)\cdot(\overline{X}+\overline{Y})$ – нормальные формы
3) $X\oplus 0=X$	4) $X\oplus(X\cdot Y)=X\cdot\overline{Y}$, $X\cdot(X\oplus Y)=X\cdot\overline{Y}$ – типа поглощения
5) $X\oplus X=0$	6) $\overline{X}\oplus(X\cdot Y)=\overline{X}+Y$, $\overline{X}\cdot(X\oplus Y)=\overline{X}\cdot Y$ – типа Блейка-Порецкого
7) $X\oplus\overline{X}=1$	8) $(X\cdot Y)\oplus(X\cdot Z)=X\cdot(Y\cdot\overline{Z}+\overline{Y}\cdot Z)$, $(X\cdot Y)\oplus(\overline{X}\cdot Z)=X\cdot Y+\overline{X}\cdot Z$
9) $1\oplus 0=1$(«0» не влияет)	10) $(X\cdot Y)\oplus(X\cdot Z)\oplus(Y\cdot Z)=X\cdot Y+X\cdot Z+Y\cdot Z$

Полином Жегалкина

Для **канонического базиса** основными способами представления булевых функций являются *нормальная дизъюнктивная и конъюнктивная формы* (ДНФ и КНФ). Это представление *неоднозначно* – для одной и той же функции может существовать множество внешне несовпадающих, но совершенно верных ДНФ и КНФ!

В 1927г. преподаватель МГУ Иван Иванович Жегалкин предложил *однозначное* представление логической функций в **алгебраическом нормальном базисе**, получившее название «Полином Жегалкина» или «*алгебраическая нормальная форма*» (АНФ).

Рассмотрим построение полинома Жегалкина (АНФ) на примере таблично заданной функции трех аргументов. Запишем общий вид искомого полинома:

$$f=a_0\oplus(a_1\cdot x)\oplus(a_2\cdot y)\oplus(a_3\cdot z)\oplus(a_4\cdot x\cdot y)\oplus(a_5\cdot x\cdot z)\oplus(a_6\cdot y\cdot z)\oplus(a_7\cdot x\cdot y\cdot z)$$

Пусть f(x,y,z)={10101110}, где последовательность значений соответствует лексически упорядоченной таблице истинности, представленной ниже. Не останавливаясь на выводе формул для коэффициентов $\mathbf{a_0 \ldots a_7}$, сведем все соотношения и коэффициены в таблицу:

№	X	Y	Z	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$\mathbf{a_0}= \mathbf{f_0}=1$
$\mathbf{a_1}= \mathbf{a_0} \oplus \mathbf{f_4}=1\oplus1=0$
$\mathbf{a_2}= \mathbf{a_0} \oplus \mathbf{f_2}=1\oplus1=0$
$\mathbf{a_3}= \mathbf{a_0} \oplus \mathbf{f_1}=1\oplus0=1$
$\mathbf{a_4}= \mathbf{a_0} \oplus \mathbf{a_1} \oplus \mathbf{a_2} \oplus \mathbf{f_6}=\oplus(1001)=0$
$\mathbf{a_5}= \mathbf{a_0} \oplus \mathbf{a_1} \oplus \mathbf{a_3} \oplus \mathbf{f_5}=\oplus(1011)=1$
$\mathbf{a_6}= \mathbf{a_0} \oplus \mathbf{a_2} \oplus \mathbf{a_3} \oplus \mathbf{f_3}=\oplus(1010)=0$
$\mathbf{a_7}= \oplus(\mathbf{a_0} \ldots \mathbf{a_6}, \mathbf{f_7})=\oplus(10010100)=1$

$\mathbf{a_0}$	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_4}$	$\mathbf{a_5}$	$\mathbf{a_6}$	$\mathbf{a_7}$
1	0	0	1	0	1	0	1

Результат выполнения цепочки операций «⊕» равен 1 для нечетного количества единиц. В полином войдут только компоненты с ненулевыми коэффициентами a_i:

$$f=1 \oplus z \oplus (x\cdot z) \oplus (x\cdot y\cdot z)$$

Преобразуем полученное соотношение в ДНФ (в скобках-номер используемой формулы): 1) $(x\cdot z) \oplus (x\cdot y\cdot z) = x\cdot\overline{y}\cdot z$ – (*4*). 2) $1 \oplus z = \overline{z}$ – (*1*), 3) $\overline{z} \oplus (x\cdot\overline{y}\cdot z) = \overline{z}+x\cdot\overline{y}$ – (*6*) – это результат. То есть функция должна быть равной единице везде, где z=0, а также там, где одновременно x=1 и y=0, то есть строки 0, 2, 4, 6, а также строки 4 и 5 → строки 0, 2, 4, 5, 6. Как видно из таблицы истинности, все преобразования выполнены верно:

$$f(x,y,z)= \overline{z} + x\cdot\overline{y}\ (\text{ДНФ}) = 1 \oplus z \oplus (x\cdot z) \oplus (x\cdot y\cdot z)\ (\text{АНФ, полином Жегалкина}).$$

Если выражение ДНФ сложное, то можно его получить из таблицы истинности картой Карно и сравнить с результатом преобразований АНФ => ДНФ. Сущетвуют формулы для преобразования ДНФ => АНФ, не рассматриваемые, как и вопросы построения и упрощения выражений с помощью карт Карно, в данном пособии.